PRIMERA PRUEBA MATEMÁTICAS II 10-11-2011

Nombre:____

Ejercicio 1.- Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

(a) **[1'5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.

(b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

Ejercicio 2. **[2'5 puntos]** Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

Ejercicio 3 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(x-3)^2$.

(a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(b) **[1 punto]** Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de f

(c) **[0'5 puntos]** Haz un esbozo de la gráfica de f.

CORRECCIÓN

1.- $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=\ln(x^2+3x)$

a) (1'5) Tangente a f // a $x-2y+1=0$.

La pendiente de la recta $x-2y+1=0$ es $m=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$, que debe ser igual al valor de la derivada de f en los puntos buscados (que han de pertenecer al dominio de f: $(0,+\infty)$).

Así $f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x}$ la igualamos a $m=\frac{1}{2}$ y resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{1}{2};\quad 4x+6=x^2+3x;\quad x^2-x-6=0;$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot1\cdot6}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm5}{2}\begin{cases}x_1=\frac{6}{2}=3\in Df\\ x_2=\frac{-4}{2}=-2\notin Df.\end{cases}$$

Así, para $x=3$ $f(3)=\ln(3^2+3\cdot3)=\ln(18)$ y el punto de la gráfica de f en el que la tangente es paralela a $x-2y+1=0$ será $(3,\ln 18)$.

b) Tangente y normal a la gráfica de f en el pto de abscisa $x=3$.

El punto indicado es el del apartado anterior. Por tanto:

$$x=3\Rightarrow f(3)=\ln(18)$$
$$f'(3)=\frac{1}{2}=m_{tgte};\quad m'_{(NORMAL)}=-\frac{1}{m}=-2.$$

Tgte: $y-y_0=m\cdot(x-x_0)\Rightarrow \boxed{y-\ln(18)=\frac{1}{2}(x-3)}$

Normal: $y-y_0=m'(x-x_0)\Rightarrow \boxed{y-\ln(18)=-2(x-3)}$

2.- Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2} = \frac{e^0 - e^{\operatorname{sen} 0}}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeter} = \underset{1^*}{(L'H)} =$$

1^*: Podemos aplicar L'Hôpital porque todas las funciones que aparecen en el cociente son derivables en $x=0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x}{2x} = \frac{e^0 - e^0 \cdot \cos 0}{2\cdot 0} = \frac{1 - 1\cdot 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Ind} =$$

$$= (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - [e^{\operatorname{sen} x} \cos x \cdot \cos x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen} x]}{2} = \frac{e^0 - [e^0 \cdot 1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0]}{2} =$$

$$= \frac{1 - 1 + 0}{2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}.$$

3.- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x(x-3)^2$

$f(x)$ es una función polinómica de 3º grado, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. No tiene asíntotas.

Desarrollamos el polinomio de $f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y trabajamos a partir de él.

a) Int. de crec. y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

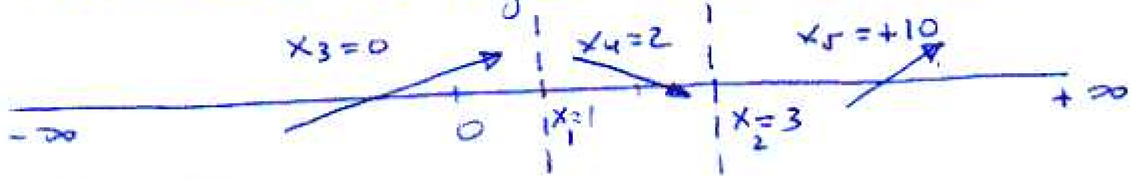
Calculamos los ext. relativos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$;

$3(x^2 - 4x + 3) = 0$; $\quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$ $\nearrow x_1 = \frac{2}{2} = 1$, $\searrow x_2 = \frac{6}{2} = 3$

$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4 \quad (1, 4)$

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \quad (3, 0)$

Estudiamos el signo de la derivada:



$f'(x_3) = f'(0) = 9 > 0 \nearrow$ Crec.

$f'(x_4) = f'(2) = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 < 0 \searrow$ Decrec

$f'(x_5) = f'(10) = 3\cdot 10^2 - 12\cdot 10 + 9 > 0 \nearrow$ Crec

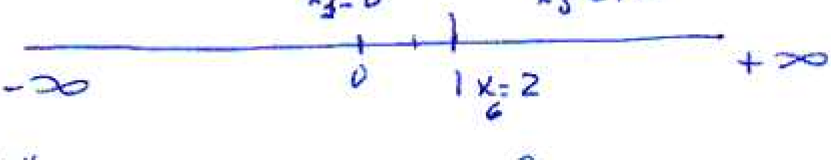
Por tanto $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(1,3)$. $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $(1,4)$ y un mínimo relativo en $(3,0)$

b) Intervalos de concavidad y convexidad.

Estudiamos $f''(x) = 6x - 12$, que sólo se anula en $6x - 12 = 0$; $6x = 12$; $x_6 = \frac{12}{6} = 2$.

$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 26 - 24 = 2$ $\quad (2,2)$

Como no hay otros elementos que afecten a la curvatura, estudiamos la concavidad y convexidad teniendo en cuenta solo el pto de inflexión hallado en $(2,2)$.



$f''(x_3) = f''(0) = 6\cdot 0 - 12 < 0$ $\cap$ Cóncava

$f''(x_5) = f''(10) = 6\cdot 10 - 12 = 48 > 0$ $\cup$ Convexa.

Por tanto, $f(x)$ será cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$ y convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$

c) Esbozo gráfico.

Teniendo en cuenta la monotonía y la curvatura de $f(x)$, sabiendo que es continua en $\mathbb{R}$ y con la tabla de valores siguiente, hacemos el esbozo gráfico de la misma.

x	y
-2	$-2(-5)^2 = -50$
-1	$-1(-4)^2 = -16$
0	$0(-3)^2 = 0$
1	4
2	2
3	$3(0)^2 = 0$
4	$4(1)^2 = 4$
5	$5(2)^2 = 20$